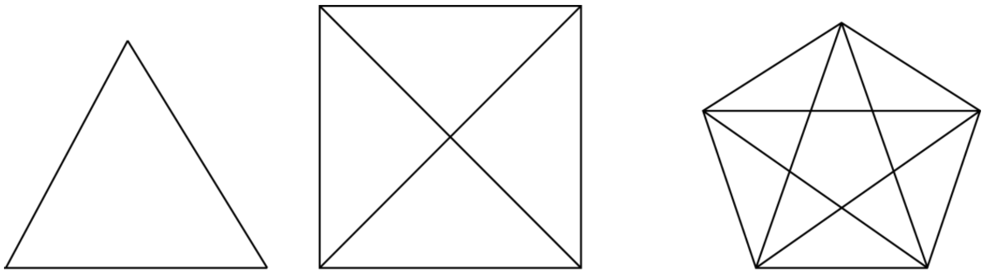
21 平面上有限個相異點至少可連結出多少種長度不一的線段

將平面上的n個相異點用線段連接可得到$\frac{n(n-1)}{2}$條線段，這些線段可能都一樣長，可能有些會一樣長。當你實際去畫畫看時，你會發現：當$n=3$時，可能會畫出三條一樣長的線段；當$n=4$時，可以畫出六條線段，但至少會出現兩種長度不一的線段；當$n=5$時，可以畫出十條線段，也會至少出現兩種長度不一的線段。事實上，當$n\geq 4$時，連接起來的線段不可能都一樣長，你可以畫畫看。



$n=3$　　$n=4$　　$n=5$

我們來看看，平面上任意給定n個相異點至少可以連接出多少種長度不一的線段？

定理 21.1　平面上任意給定n個相異點，至少可連接出

$$\sqrt{n-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}$$

種長度不一的線段。

【證明】(1)首先，將此n個相異點標上

$$P_1, P_2, \cdots, P_n$$

且將最外面的點連接起來，使之成為一個凸多邊形（如下圖所示）。連接

$$P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4, \cdots, P_1P_n$$

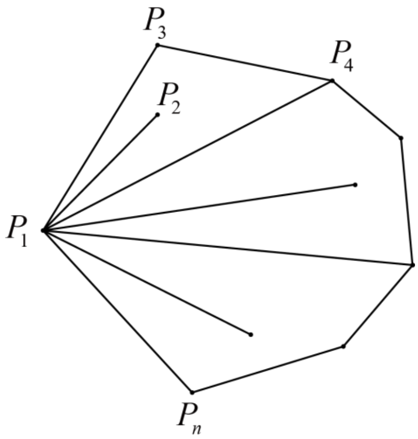
共有$n-1$條線段。設此$n-1$條線段共出現k種長度不一的線段，其長度分別是

$d_1, d_2, \cdots, d_k$ 單位且每一種線段出現的次數分別為 $f_1, f_2 \cdots, f_k$ 次，則 $f_1 + f_2 + \cdots + f_k = n-1$。

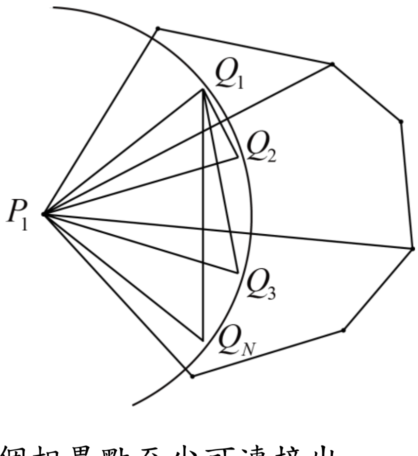
設第 i 種線段長出現最多次，令其次數為 $f_i = N$,則 $N \geq f_j$ $(1 \leq j \leq k)$，所以

$$n-1 = f_1 + f_2 + \cdots + f_k \leq kN \Rightarrow n-1 \leq kN \Rightarrow k \geq \frac{n-1}{N},$$

即至少產生 $\frac{n-1}{N}$ 種長度不一的線段。



(2) 若以 P_1 為圓心 d_i（d_i 為出現最多次的線段長）為半徑畫圓，則此圓必通過 $P_2, P_3, \cdots, P_n$ 中的 N 個點(因為長度為 d_i 的線段有 N 條)。將這 N 個點標上 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$,可以發現這 N 個點被限制在半圓上（因為 P_1 是凸多邊形的頂點且 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ 在此凸多邊形內（含邊上)），連接 $Q_1Q_2, Q_1Q_3, \cdots, Q_1Q_N$（如下圖所示），則這 $N-1$ 條線段都不一樣長，我們得到 $N-1$ 種長度不一的線段，即至少產生 $N-1$ 種長度不一的線段。



綜合(1), (2)可知：平面上的 n 個相異點至少可連接出

為

$$\max\left\{N-1,\frac{n-1}{N}\right\}$$

種長度不一的線段（此處 $\max\{x,y\}$ 是指 x,y 中較大的數）。若正整數

$$N\geq\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}$$

則顯然

$$\max\left\{N-1,\frac{n-1}{N}\right\}\geq N-1\geq\sqrt{n-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}.$$

若正整數

$$N\leq\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}$$

則

$$\begin{aligned}\max\left\{N-1,\frac{n-1}{N}\right\} &\geq \frac{n-1}{N}\\ &\geq \frac{n-1}{\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}}\\ &\geq \sqrt{n-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

綜合得到：無論正整數 N 為何，恆有

$$\max\left\{N-1,\frac{n-1}{N}\right\}\geq\sqrt{n-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}.$$

得證。

例題 21.1　若 $n\geq 4$ 則由**定理 21.1** 知道：至少可以連接出 2 種長度不一的線段。這是因為

$$\sqrt{n-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2} \geq \sqrt{4-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2} \geq 1.3027755.$$

習題 21.1　證明：平面上任意給定 7 個相異點，至少可連接出 3 種長度不一的線段，並舉例說明 3 是否有可能發生。

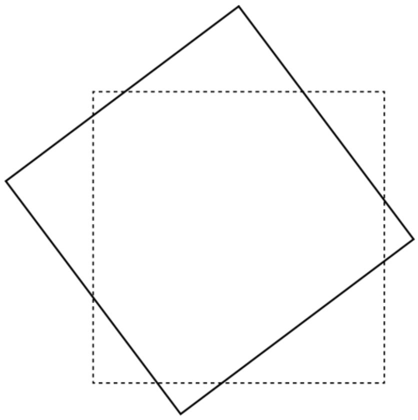
動手玩數學

將長梯子分成 $3n$ 個相同的格子，油漆工人想用 n 種不同顏色的油漆來粉刷梯子。為了美觀起見，每種顏色剛好粉刷三個格子，而且同一種顏色的粉刷方式必須是下圖之一，即必須是空一格再空兩格或者是空兩格再空一格的方式來粉刷同一種顏色。油漆工人的數學不是很靈光，你是否可以幫他找到一個可行的 n 值。

⋯		1		1			1				2			2		2	⋯

挑戰題

如下圖：實線與虛線正方形的邊長一樣，相交出一個凸八邊形。證明：這凸八邊形四段實線段的和與四段虛線段的和一樣。



三角形面積最大的猜想

在單位長的圓內（含邊上）放置相異的$n(n \geq 3)$個點，這n個點構成$\binom{n}{3}$個三角形。應該如何放置此n個點，才能使這$\binom{n}{3}$個三角形中面積最小的儘可能的大，並令$\Delta(n)$是所得到的最大值。這問題是由海爾布倫所提出的，而愛爾特希證明了

$$\Delta(n) > \frac{1}{2n^2}.$$